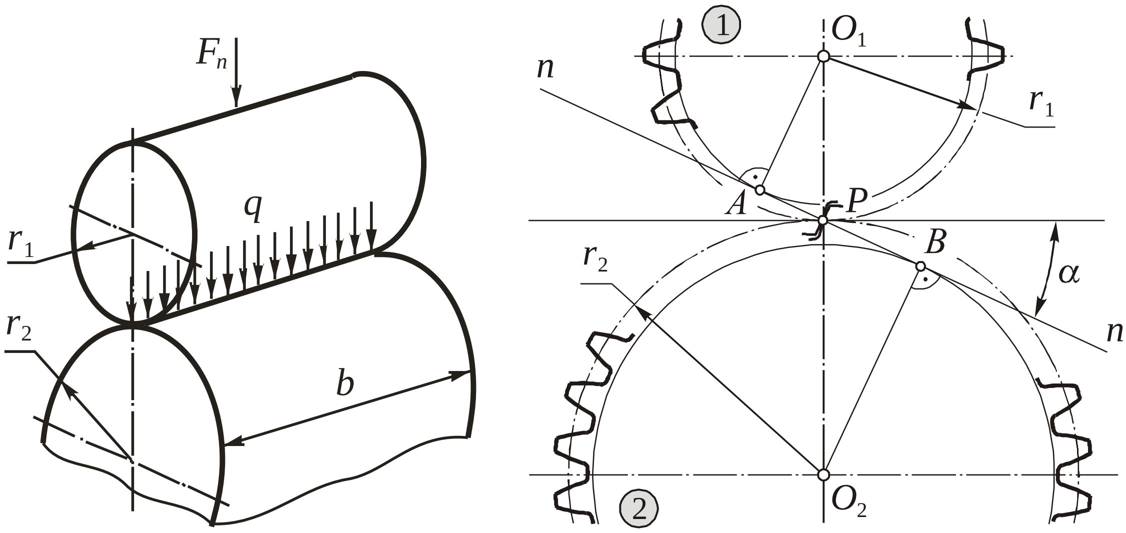
## Лекция 3. Расчет зубчатых передач. Косозубые передачи

### 1. Расчет зубьев на контактную прочность

При расчете контактных напряжений $\sigma_H$ с целью упрощения задачи рассматривают положение зубчатых колес, при котором зацепление происходит непосредственно в полюсе $P$. Такой подход отчасти оправдывается тем обстоятельством, что контакт в околополюсной зоне соответствует стадии однопарного зацепления, когда длина линии контакта минимальна и равна ширине $b$ колеса, а напряжения, соответственно, максимальны.




Максимальные напряжения $\sigma_H$ на площадке контакта определяют по формуле Герца (аналогично тому, как производится расчет на контактную прочность фрикционных передач):

$$\sigma_H = 0{,}418\sqrt{qE/\rho},$$

где $E = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$ – приведенный модуль упругости Юнга; $q$ – расчетная погонная нагрузка; $\rho$ – приведенный радиус кривизны.

Расчетная погонная нагрузка определяется отношением расчетной нормальной силы зацепления к длине контактной линии:

$$q = \frac{F_n K_H}{b_2} = \frac{2T_1 K_H}{d_1 b_2 \cos\alpha}.$$

В последней формуле через $K_H$ обозначен коэффициент расчетной нагрузки; $T_1$ – вращающий момент на валу шестерни; $d_1$ – диаметр шестерни; $b_2$ – ширина зубчатого венца колеса.

Замечание. В качестве длины линии контакта выбирают ширину $b_2$ венца колеса, поскольку ширина $b_1$ венца шестерни в большинстве случаев несколько превышает $b_2$ и, таким образом, выступает за зону контакта.

Приведенная кривизна контактируемых поверхностей определяется не радиусами $r_1$ и $r_2$ самих колес, как например у фрикционной передачи, а радиусами кривизны $\rho_1$ и $\rho_2$ эвольвентных поверхностей *зубьев*:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

Для вычисления приведенной кривизны используем то свойство эвольвенты, согласно которому радиус кривизны в любой ее точке равен отрезку касательной к основной окружности от данной точки эвольвенты до точки касания. Поскольку, как видно из рисунка, линия зацепления является также касательной к основным окружностям, указанные радиусы кривизны представляют собой отрезки линии зацепления – *AP* для эвольвенты зуба шестерни и *BP* для эвольвенты зуба колеса. Следовательно,

$$\rho_1 = AP = r_1 \sin\alpha; \quad \rho_2 = BP = r_2 \sin\alpha.$$

Подстановка этих выражений дает:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)=\frac{2}{d_1\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{u}\right)=\frac{2}{d_1\sin\alpha}\left(\frac{u+1}{u}\right),$$

где передаточное число $u = d_2 / d_1$.

Используя формулу Герца, с учетом найденного, запишем условие контактной прочности зубьев при циклическом нагружении:

$$\sigma_H = 1{,}18\sqrt{\frac{ET_1K_H}{d_1^2 b_2 \sin 2\alpha}\left(\frac{u+1}{u}\right)} \le [\sigma_H].$$

Напомним, что индекс 1 относится к параметрам шестерни, а 2 – к параметрам колеса.

Записанную формулу применяют для проверочного расчета на контактную выносливость. При проведении проектного расчета с ее помощью можно определить диаметр $d_1$ шестерни или межосевое расстояние $a_w$ при заданной ширине $b_2$ колеса. Приведем без вывода соответствующую формулу:

$$a_w \ge 0{,}85(u+1)\sqrt[3]{\frac{ET_2K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_{ba}}},$$

где $\psi_{ba}$ — коэффициент ширины колеса: $\psi_{ba} = b_2 / a_\omega$; коэффициент концентрации нагрузки $K_{H\beta}$ представляет собой один из сомножителей, определяющих полный коэффициент расчетной нагрузки:

$$K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}.$$

Два других сомножителя – коэффициент распределения нагрузки между зубьями $K_{H\alpha}$ и коэффициент динамической нагрузки $K_{Hv}$, учитывая грубый, предварительный характер проектного расчета, принимают в совокупности равными некоторому среднему значению: $K_{H\alpha} \cdot K_{Hv} = 1{,}15$, которое введено в числовой множитель 0,85.

В качестве $[\sigma_H]$ обычно берут допускаемое напряжение для зубьев колеса $[\sigma_{H2}]$, поскольку зубья шестерни, как правило, имеют более высокие прочностные показатели.

## 2. Расчет зубьев на изгибную прочность

Данный вид расчета считается основным для зубьев открытых передач. Зуб рассматривают как короткую консольную балку, работающую на изгиб и сжатие, предполагая при этом, что нормальная сила зацепления $F_n$ приложена к вершине зуба. Угол $\alpha_a$ наклона $F_n$ к оси зуба для простоты расчета принимают равным углу зацепления $\alpha$.

Перенесем силу $F_n$ на ось зуба и разложим на окружную $F_t$ и радиальную $F_r$ составляющие. Опасным является поперечное сечение ножки зуба. Нормальные напряжения здесь можно определить как сумму напряжений изгиба от действия окружной силы $F_t$ и напряжений сжатия от действия радиальной силы $F_r$:

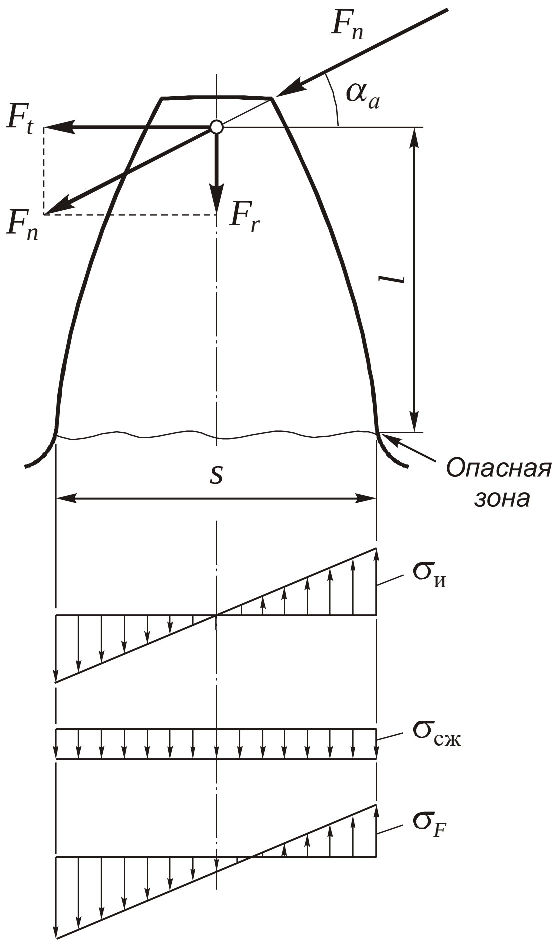
$$\sigma_F = \sigma_{\text{и}} + \sigma_{\text{сж}}.$$

На рисунке приведены также эпюры распределения напряжений изгиба $\sigma_{\text{и}}$ и напряжений сжатия $\sigma_{\text{сж}}$. Их максимальные значения определяются известными формулами сопротивления материалов:

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{F_t l}{W_y}; \qquad \sigma_{\text{сж}} = \frac{F_r}{A}.$$

В эти формулы входят площадь и осевой момент сопротивления сечения изгибу: $A = bs$; $W_y = bs^2/6$. Параметры $l$, $b$ и $s$ характеризуют расчетную высоту зуба и размеры сечения его ножки.

Эпюра суммарных напряжений $\sigma_F$ получается суммированием эпюр $\sigma_{\text{и}}$ и $\sigma_{\text{сж}}$. Наиболее опасной следует считать крайнюю правую точку сечения, где напряжения имеют растягивающий характер. Именно из этой области, как показывает практика, начинает развиваться усталостная трещина. Сложение $\sigma_и$ и $\sigma_{сж}$ с учетом их знака дает для этой точки следующее значение нормального напряжения:




$$\sigma_F = \frac{F_t l}{W_y} - \frac{F_r}{A},$$

или, с учетом предыдущего,

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b}\left(\frac{6l}{s^2} - \frac{\mathrm{tg}\alpha}{s}\right).$$

Выразим линейные размеры зубьев в долях модуля $m$:

$$l = ml' \text{ и } s = ms'.$$

С учетом этих равенств формула для нормального напряжения в опасной зоне принимает вид:

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F}{bm}\left[\frac{6l'}{(s')^2} - \frac{tg\alpha}{s'}\right]K_T,$$

где введены коэффициент $K_F$ расчетной нагрузки и теоретический коэффициент концентрации напряжений $K_T$.

Безразмерные параметры $l'$ и $s'$ зависят только от формы зуба и не зависят от абсолютных размеров колеса.

Если колеса разных диаметров имеют одинаковое число зубьев, то зубья подобны друг другу по форме и характеризуются одинаковыми значениями $l'$ и $s'$. Теоретический коэффициент концентрации напряжений $K_T$ также определяется только формой зубьев.

Объединим в формуле для $\sigma_F$ множители, не зависящие от абсолютных размеров колеса, в единую конструкцию:

$$Y_F = \left[\frac{6l'}{(s')^2} - \frac{tg\alpha}{s'}\right]K_T.$$

$Y_F$ называют *коэффициентом формы зуба*, его величина зависит только от числа зубьев $z$ и от коэффициента $\xi$ смещения инструмента (если колесо корригированное). Значения $Y_F$ приводятся в справочных таблицах.

С учетом введенных обозначений условие изгибной прочности зубьев колеса может быть записано в виде:

$$\sigma_F = \frac{Y_F F_t K_F}{b_2 m} \le [\sigma_F].$$

Проверочный расчет по этой формуле следует проводить как для колеса, так и для шестерни передачи.

При расчете закрытых передач последнее условие обычно выполняется со значительным запасом. Для передач этого вида изгибная прочность зубьев, в отличие от контактной прочности, не является фактором, ограничивающим их нагрузочную способность.

Конструкторский расчет по напряжениям изгиба производят, как правило, при проектировании открытых передач. В результате расчета находят минимальное значение модуля зацепления. С этой целью в формулу условия прочности подставляют:

$$b_2 = \psi_m m; \quad F_t = 2T_1/d_1; \; d_1 = z_1 m; \; K_F = K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv},$$

где $\psi_m$ – коэффициент ширины колеса по модулю, значения которого стандартизованы и зависят от степени точности передачи (прил. 5).

В результате, положив предварительное значение коэффициента динамической нагрузки равным некоторому среднему значению $K_{Fv} = 1{,}5$, получим:

$$m_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3T_1 K_{F\alpha} K_{F\beta} Y_F}{z_1 \psi_m [\sigma_F]}},$$

Замечание. Поскольку количество типоразмеров инструмента, применяемого для нарезки зубьев, ограничено, значения модуля (в мм) должны соответствовать следующему стандартному ряду:

$m$ | 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80.

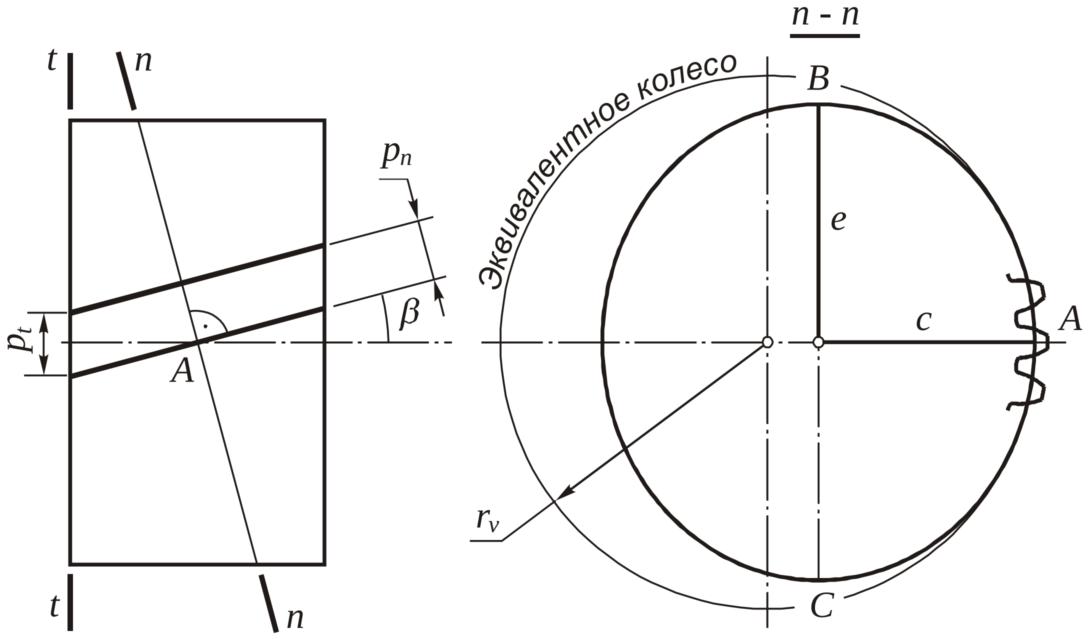
Допускаются также значения, равные полусумме соседних членов записанного ряда.

## 3. Косозубые передачи. Понятие об эквивалентном колесе

У косозубого цилиндрического колеса линия зуба составляет с образующей делительного цилиндра угол $\beta$, называемый *углом наклона зубьев*. При нарезке таких колес используется тот же инструмент, что и для прямозубых колес, поэтому профиль зуба в нормальном сечении $n$ – $n$ при определенных условиях совпадает с профилем прямого зуба. Выясним, что это за условия.

Как видно из рисунка, в торцовом сечении $t$ – $t$ параметры зуба зависят от угла наклона $\beta$. Если обозначить делительный шаг в нормальном сечении через $p_n$, величина которого определена стандартом инструментальной рейки: $p_n = \pi m$, – то в торцовом сечении окружной делительный шаг определится формулой

$$p_t = p_n / \cos\beta.$$




К определению эквивалентного колеса

По величине окружного шага легко найти диаметр делительного цилиндра. Поскольку вдоль делительной окружности умещается строго $z$ шагов, делительный диаметр

$$d = \frac{p_t z}{\pi} = \frac{mz}{\cos\beta}.$$

*Эквивалентным называют такое прямозубое колесо, у которого профиль зубьев не отличается от нормального профиля зубьев косозубого колеса.*

Рассмотрим сечение $n - n$ колеса, нормальное к линии одного из зубьев. Данное сечение представляет собой эллипс с полуосями $c = r$ и $e = r/\cos\beta$. Поскольку сечение является нормальным только по отношению к зубу $A$, профили остальных зубьев будут искажены тем больше, чем дальше они отстоят от $A$. Сам профиль $A$ практически не искажается, что позволяет принять его за истинный *нормальный профиль зуба*.

Радиус кривизны в точке $A$ на малой полуоси эллипса, согласно курсу геометрии, равен отношению квадрата большой полуоси к малой:

$$\rho_A = e^2 / c = r / \cos^2\beta.$$

Это выражение и определяет радиус эквивалентного колеса:

$$r_v = r / \cos^2\beta.$$

Соответственно, диаметр эквивалентного колеса

$$d_v = d / \cos^2 \beta .$$

Согласно приведенным выше формулам, на колесе такого радиуса разместится следующее эквивалентное число зубьев:

$$z_v = d_v / m = \frac{z}{\cos^3 \beta} .$$

Прочность зуба зависит от формы его нормального сечения, которая совпадает с формой сечения зубьев эквивалентного прямозубого колеса, поэтому в прочностном отношении косозубые колеса эквивалентны прямозубым, но имеющим больший диаметр. Таким образом, применение косозубых колес позволяет уменьшить габариты передачи.

## 4. Геометрические параметры косозубых колес

Для косозубой цилиндрической передачи передаточное отношение определяется так же, как и для прямозубой передачи:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1} .$$

Делительные диаметры колес:

$$d_1 = \frac{m z_1}{\cos \beta}; \qquad d_2 = \frac{m z_2}{\cos \beta} .$$

Формулы для диаметров окружностей вершин и впадин колес не отличаются от аналогичных формул для прямозубых передач.

Межосевое расстояние

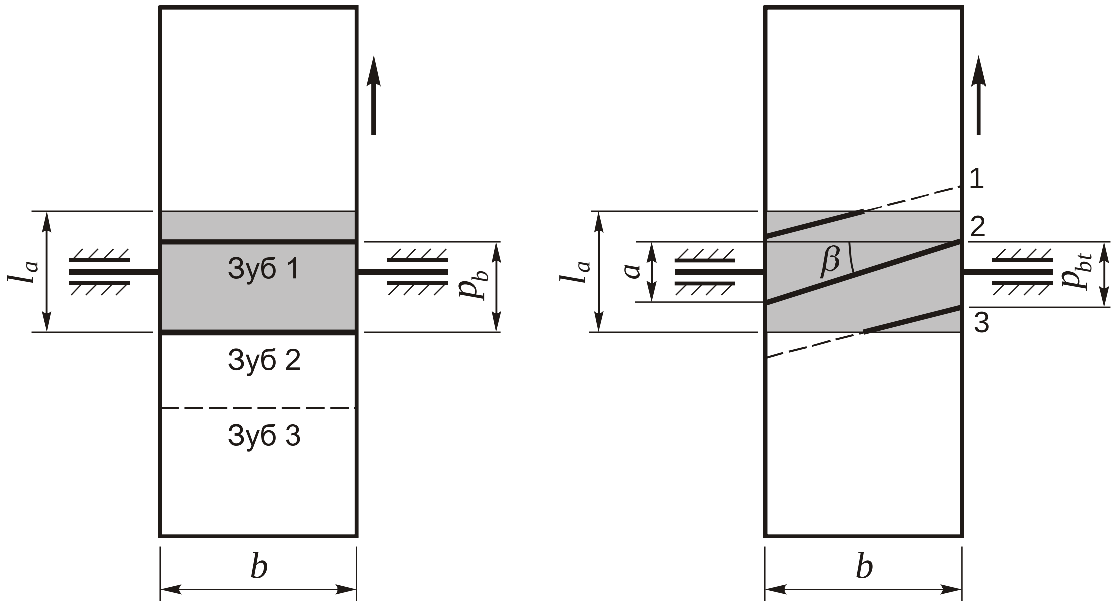
$$a_w = 0{,}5(d_1 + d_2) = \frac{(z_1 + z_2) m}{2 \cos \beta} .$$

Угол наклона зубьев β в зависимости от заданного межосевого расстояния определяется по формуле

$$\beta = \arccos \frac{(\mathrm{z}_1 + z_2) m}{2 a_\omega} .$$

### 5. Основное достоинство косозубых передач

Если сравнить картины зацепления прямозубых и косозубых колес, представленные на рисунке, бросается в глаза главное отличие: косые зубья входят в зону зацепления постепенно. При этом общая длина линии контакта изменяется достаточно плавно, а при определенном подборе параметров колес вообще может оставаться неизменной. Ударные нагрузки, характерные для зацепления прямозубых колес, сглаживаются, что позволяет увеличить быстроходность косозубых передач в два раза.




### 6. Силы в косозубом зацеплении

Определим силы в зацеплении пары косозубых колес при заданном вращающем моменте $T_1$ на валу шестерни.

Полная сила $F_n$ направлена вдоль линии зацепления по нормали к поверхности зуба. Соответствующий вектор лежит в нормальном сечении зуба, где может быть разложен на две составляющие: радиальную силу $F_r$ и перпендикулярную ей силу $F_t'$. Сила $F_t'$ лежит в плоскости основного рисунка и раскладывается на окружную $F_t$ и осевую $F_a$ составляющие.

Окружная сила определяется по вращающему моменту известной формулой:

$$F_t = 2T_1 / d_1.$$

Поскольку углы зацепления $\alpha$ и наклона зубьев $\beta$, определяющие разложение, предполагаются известными, легко определить остальные силы. Осевая сила

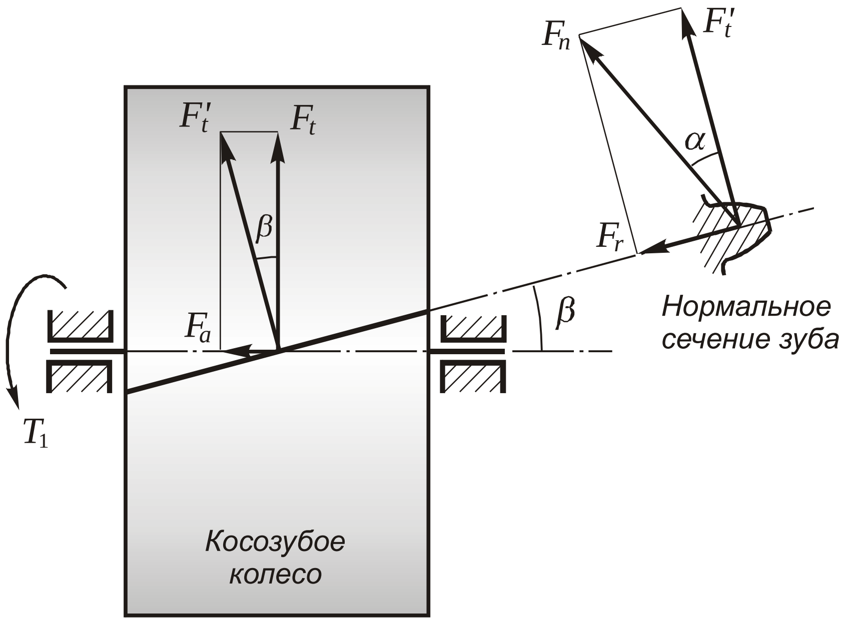
$$F_a = F_t \text{tg}\beta.$$

Радиальная сила

$$F_r = F_t' \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_t \operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}.$$

Полная сила в зацеплении

$$F_n = F_t' / \cos\alpha = \frac{F_t}{\cos\alpha \cos\beta}.$$




К определению сил в косозубом зацеплении

*Основной недостаток косозубых передач* заключается в наличии осевой силы $F_a$ в зацеплении, что приводит к осевым нагрузкам на опоры валов и создает неблагоприятные условия для работы подшипников.